

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XVIII-a, Baia Mare, 22 noiembrie 2025

BAREM DE CORECTARE, CLASA a IX-a

Subiectul 1. Determinați numerele reale x, y, z, t care verifică ecuația $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = t + \sqrt{x + y + z - t}$.

Soluție:

Ecuația are sens doar dacă sunt îndeplinite condițiile $x + y + z - t \geq 0$ și $t + \sqrt{x + y + z - t} \geq 1$ 1p

Notăm $a = \sqrt{x + y + z - t} \Rightarrow t = x + y + z - a^2$ 2p

Ecuația devine $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = x + y + z - a^2 + a$ 1p

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ 2p

$\Rightarrow x = y = z = a = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{5}{4}$, care verifică condițiile impuse 1p

Subiectul 2. a) Demonstrați că $\left| \frac{90x}{x^2 + 2025} \right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați, în $\mathbb{R}$, ecuația $\left[\frac{90x}{x^2 + 2025} \right] = \left[\frac{x}{50} \right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Soluție:

Supliment Gazeta Matematică 2/2025

a) $\left| \frac{90x}{x^2 + 2025} \right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{90|x|}{x^2 + 2025} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2025 \geq 90|x| \Leftrightarrow (|x| - 45)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Avem egalitate dacă și numai dacă $|x| = 45 \Leftrightarrow x \in \{-45, 45\}$ 2p

b) Din a) $\frac{90x}{x^2 + 2025} \in [-1, 1], \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left[\frac{90x}{x^2 + 2025} \right] \in \{-1, 0, 1\}$ 1p

Fie $E(x) = \frac{90x}{x^2 + 2025}$

I. Dacă $E(x) \in [-1, 0)$, deci $x < 0$, ecuația devine $-1 = \left[\frac{x}{50} \right] \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{50} < 0 \Leftrightarrow -50 \leq x < 0 \Rightarrow x \in [-50, 0)$ 1p

II. Dacă $E(x) \in [0, 1)$, deci $x \geq 0$ și $x \neq 45$, ecuația devine $0 = \left[\frac{x}{50} \right] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{x}{50} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x < 50 \Rightarrow x \in [0, 50) \setminus \{45\}$ 1p

III. Dacă $E(x) = 1 \Leftrightarrow x = 45$, ecuația devine $1 = \left[\frac{45}{50} \right]$, fals

Mulțimea soluțiilor este $S = [-50, 50) \setminus \{45\}$ 2p

Subiectul 3. a) Arătați că $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$, $\forall x, y > 0$.

b) Fie $a, b, c > 0$ cu $a + b + c = 1$. Arătați că $\frac{a^3}{a^2 + 2bc} + \frac{b^3}{b^2 + 2ca} + \frac{c^3}{c^2 + 2ab} \geq \frac{1}{3}$.

Soluție:

a) $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$, $\forall x, y > 0 \Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq (x + y)xy$, $\forall x, y > 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - xy + y^2 \geq xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$, $\forall x, y > 0$ relație adevărată..... 2p

b) Folosind

$$2bc \leq b^2 + c^2, 2ac \leq a^2 + c^2, 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow \frac{a^3}{a^2 + 2bc} + \frac{b^3}{b^2 + 2ac} + \frac{c^3}{c^2 + 2ab} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \dots\dots\dots 1p$$

Utilizând a) avem $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$

$$b^3 + c^3 \geq b^2c + bc^2$$

$$c^3 + a^3 \geq c^2a + ca^2$$

Prin însumarea relațiilor anterioare obținem:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b) + (a^3 + b^3 + c^3)$$

$$\Rightarrow 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2(a + b + c) + b^2(a + b + c) + c^2(a + b + c)$$

$$\Rightarrow 3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a + b + c}{3} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 3p$$

Se obține egalitate pentru $a = b = c = \frac{1}{3}$ 1p

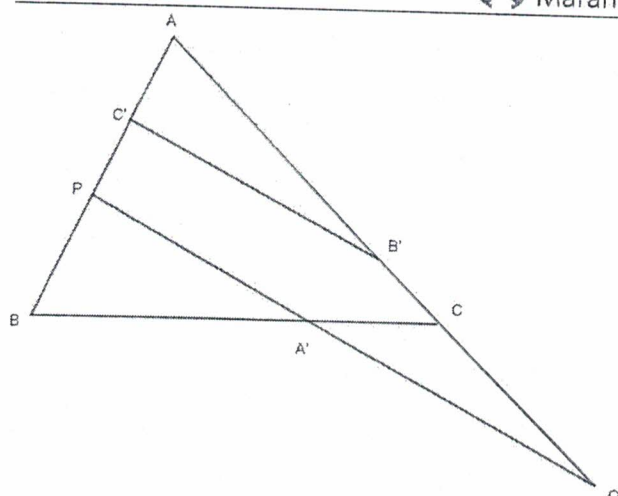
Subiectul 4. Fie $\triangle ABC$ și punctele A', B', C' astfel încât $\overrightarrow{BA'} = x \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = x \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AC'} = x \cdot \overrightarrow{AB}$, cu

$x \in (0, 1)$. Dreapta care trece prin A' și este paralelă cu $B'C'$ intersectează AB și AC în P , respectiv Q . Arătați că $PQ \geq 2 \cdot B'C'$.

Soluție: Vom scrie vectorul $\overrightarrow{AA'}$ în două moduri, în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$

Cum $\overrightarrow{BA'} = x \cdot \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = (1 - x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$ (1) 1p

Notând $\frac{PA'}{PQ} = y \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = (1 - y)\overrightarrow{AP} + y\overrightarrow{AQ}$, $y \in (0, 1)$ (2)..... 1p



Dar $\triangle APQ \sim \triangle AC'B' \Rightarrow \frac{AP}{AC'} = \frac{AQ}{AB'} = \frac{PQ}{B'C'} = z$ (3)

Din (3) obținem $\Rightarrow \overline{AP} = z \cdot \overline{AC'}$ și cum, din ipoteză $\overline{AC'} = x \cdot \overline{AB} \Rightarrow \overline{AP} = z \cdot x \cdot \overline{AB}$ (4) 1 p

Din (3) $\Rightarrow \overline{AQ} = z \cdot \overline{AB'}$ și cum, din ipoteză $\overline{CB'} = x \cdot \overline{CA} \Rightarrow \overline{AB'} = \overline{AC} - \overline{B'C} = \overline{AC} - x \cdot \overline{AC} = (1-x) \cdot \overline{AC} \Rightarrow$
 $\overline{AQ} = z \cdot (1-x) \cdot \overline{AC}$ (5)

Din (2), (4), (5) $\Rightarrow \overline{AA'} = (1-y) \cdot z \cdot x \cdot \overline{AB} + y \cdot z \cdot (1-x) \cdot \overline{AC}$ (6) 1 p

Din (1) și (6) $\Rightarrow 1-x = (1-y) \cdot z \cdot x$

$y \cdot z \cdot (1-x) = x$ 1 p

Prin împărțirea relațiilor anterioare se obține $\frac{1}{y \cdot z} = (1-y) \cdot z \Rightarrow 1 = y \cdot (1-y) \cdot z^2 \Rightarrow z^2 = \frac{1}{y \cdot (1-y)}$

Trebuie demonstrat că $\frac{1}{y \cdot (1-y)} \geq 4, \forall y \in (0,1)$

$\frac{1}{y \cdot (1-y)} \geq 4 \Leftrightarrow 4y(1-y) \leq 1 \Leftrightarrow 4y - 4y^2 \leq 1 \Leftrightarrow (2y-1)^2 \geq 0$, adevărat pentru orice $y \in (0,1)$.

Deci $z \geq 2 \Rightarrow \frac{PQ}{B'C'} \geq 2 \Rightarrow PQ \geq 2 \cdot B'C'$ 2 p

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XVIII-a, Baia Mare, 22 noiembrie 2025

BAREM DE CORECTARE, CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ verifică relația $z^n + nz + a = 0$, atunci $|z| \geq 1$.

Soluție: Avem $z^n + nz + a = 0$ și $\bar{z}^n + n\bar{z} + a = 0$, rezultă $z^n - \bar{z}^n + n(z - \bar{z}) = 0$1p

$$\Rightarrow z^n - \bar{z}^n = n(\bar{z} - z) \stackrel{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}{\Rightarrow} n = -\left(z^{n-1} + z^{n-2} \cdot \bar{z} + \dots + z \cdot \bar{z}^{n-2} + \bar{z}^{n-1}\right) \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow |n| = \left| -\left(z^{n-1} + z^{n-2} \cdot \bar{z} + \dots + z \cdot \bar{z}^{n-2} + \bar{z}^{n-1}\right) \right| \Rightarrow n = \left| \sum_{k=1}^n \left(z^{n-k} \cdot \bar{z}^{k-1} \right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| z^{n-k} \cdot \bar{z}^{k-1} \right| \dots\dots\dots 2p$$

$$n \leq \sum_{k=1}^n |z|^{n-1} = n \cdot |z|^{n-1} \Rightarrow |z|^{n-1} \geq 1 \Rightarrow |z| \geq 1. \dots\dots\dots 2p$$

Subiectul 2.

a) Fie a, b, c numere reale din $(0, \infty)$. Arătați că

$$\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)} - 1 \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

b) Determinați cel mai mic număr real m astfel încât

$$\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)} - 1 + m(|a-b| + |b-c| + |c-a|) \geq \frac{a+b+c}{3}, \forall a, b, c > 0.$$

Soluție:

a) Din inegalitatea mediilor rezultă $\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)} \leq \frac{(1+a) + (1+b) + (1+c)}{3} = 1 + \frac{a+b+c}{3}$, de unde concluzia.1p

b) Putem presupune $a \geq b \geq c$. Dacă notăm $x = \sqrt[3]{1+a}, y = \sqrt[3]{1+b}, z = \sqrt[3]{1+c}$, atunci inegalitatea din enunț revine la $xyz - 1 + 2m(x^3 - z^3) \geq \frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3}{3}$, pentru orice $x \geq y \geq z > 1$2p

În particular, pentru $x = y$ trebuie ca $x^2z + 2m(x^3 - z^3) \geq \frac{2x^3 + z^3}{3}$, de unde $m \geq \frac{2x^3 + z^3 - 3x^2z}{6(x^3 - z^3)}$

$$= \frac{2x^2 - xz - z^2}{6(x^2 + xz + z^2)}, \forall x \geq z > 1. \text{ Prin urmare } m \geq \frac{2t^2 - t - 1}{6(t^2 + t + 1)}, \forall t > 1 \text{ (am notat } t = \frac{x}{z} \text{)}. \dots\dots\dots 2p$$

Așadar trebuie ca $(6m-2)t^2 + (6m+1)t + 6m+1 \geq 0, \forall t > 1$. Se vede că $m \geq \frac{1}{3}$. Într-adevăr, pentru $m < \frac{1}{3}$, inegalitatea nu poate avea loc pentru orice $t > 1$ deoarece coeficientul lui t^2 este negativ.1p

În continuare vom arăta că $m = \frac{1}{3}$ este numărul căutat, adică $xyz + \frac{2(x^3 - z^3)}{3} \geq \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$, pentru orice $x \geq y \geq z > 1$. Inegalitatea se poate scrie sub forma $(x - y)(x^2 + xy + y^2) + 3z(xy - z^2) \geq 0$, care este evident adevărată.1p

Subiectul 3. Fie $F = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(f(x) + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}\}$.

- Determinați toate funcțiile injective din F .
- Determinați toate funcțiile surjective din F .
- Arătați că F conține funcții neconstante care nu sunt nici injective și nici surjective.

Soluție:

a) Din $f(f(x) + y) = f(x) + f(y)$, $f(f(y) + x) = f(y) + f(x)$ și injectivitatea funcției f , obținem

$$f(x) + y = f(y) + x \Rightarrow f(x) - x = f(y) - y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots 2p$$

Obținem funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) - x$ este constantă pe $\mathbb{R}$, rezultă că există constanta $k \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$g(x) = k, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + k, k \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots 1p$$

b) Din f surjectivă rezultă că există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(t) = 0$.

Pentru $y = t$ avem $f(f(x) + t) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}. (1) \dots\dots\dots 2p$

Din surjectivitatea funcției f rezultă $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y - t \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(y - t + t) = y - t$
 $\Rightarrow f(y) = y - t, y \in \mathbb{R}$, cu $t \in \mathbb{R}$ constantă.1p

c) Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$ aparține mulțimii F . (justificare)1p

Subiectul 4. Fie $n \geq 3$. Determinați cel mai mic număr natural k cu proprietatea că pentru orice funcție bijectivă $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, există $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $|f(i) - i| \leq k$.

Gazeta Matematică

Soluție:

Cazul I. Dacă n este număr par $\Rightarrow n = 2m, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$.

Pentru $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m & m+1 & m+2 & \dots & 2m \\ m+1 & m+2 & \dots & 2m & 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix}$ avem $|f(i) - i| = m \leq k \Rightarrow k_{\min} \geq m. \dots\dots\dots 2p$

Arătăm că $k_{\min} = m$, adică pentru orice $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, există $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $|f(i) - i| \leq m$.

Presupunem contrariul, că există $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, astfel încât $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ avem $|f(i) - i| \geq m + 1$.

$$|f(i) - i| \geq m + 1 \Leftrightarrow f(i) - i \geq m + 1 \text{ sau } f(i) - i \leq -m - 1 \Leftrightarrow f(i) \geq m + 1 + i \text{ sau } f(i) \leq i - m - 1, \forall i = \overline{1, 2m}.$$

$$\Rightarrow f(m) \geq 2m + 1 \text{ (fals) sau } f(m) \leq -1 \text{ (fals)} \Rightarrow \text{contradicție. Deci } k_{\min} = m = \frac{n}{2}. \dots\dots\dots 2p$$

Cazul II. Dacă n este număr impar $\Rightarrow n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}, m \geq 1$.

Pentru $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m & m+1 & m+2 & \dots & 2m+1 \\ m+2 & m+3 & \dots & 2m+1 & 1 & 2 & \dots & m+1 \end{pmatrix}$ avem $|f(i) - i| = m + 1$ pentru $i = \overline{1, m}, |f(i) - i| = m$

pentru $i = m + 1, 2m + 1 \Rightarrow k_{\min} \geq m. \dots\dots\dots 2p$



Arătăm că $k_{\min} = m$, adică pentru orice $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, există $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $|f(i) - i| \leq m$.

Presupunem contrariul, că există $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, astfel încât $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ avem $|f(i) - i| \geq m + 1$.

$$|f(i) - i| \geq m + 1 \Leftrightarrow f(i) \geq m + 1 + i \text{ sau } f(i) \leq i - m - 1, \forall i = \overline{1, 2m+1}$$

$$\Rightarrow f(m+1) \geq 2m+2 \text{ (fals) sau } f(m+1) \leq 0 \text{ (fals)} \Rightarrow \text{contradicție. Deci } k_{\min} = m = \frac{n-1}{2}. \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{În concluzie, } k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
 ediția a XVIII-a, Baia Mare, 22 noiembrie 2025
 BAREM DE CORECTARE, CLASA A XI-A

Subiectul 1.

a) Determinați $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot B = I_2$.

b) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matriceală $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluție: a) Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Rezultă $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obținem imediat $\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ a+5c=0 \\ b+5d=1 \end{cases}$ și de aici $B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 3p

b) Din ecuația din problemă rezultă că $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Notând $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = Y$, obținem $Y^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, adică $Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ (*). 1p

Din $Y^3 = Y \cdot Y^2 = Y^2 \cdot Y$, deducem că Y comută cu $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Notând $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ rezultă $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ și de aici $\begin{cases} 0 = -6z \\ -6x + 6y = -6t \\ 0 = 6z \\ -6z + 6t = 6t \end{cases}$.

Obținem $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x-y \end{pmatrix}$ 1p

Ecuația (*) devine $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x-y \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, adică $\begin{pmatrix} x^2 & xy + y(x-y) \\ 0 & (x-y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Se obține $x=0$ și $y=\pm\sqrt{6}$, rezultând $Y = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{6} \end{pmatrix}$ sau $Y = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$ 1p

În primul caz deducem că $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{6} \end{pmatrix}$ și înmulțind la dreapta cu matricea B , obținem

$X = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. În celălalt caz $X = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aceste două matrice sunt soluții ale ecuației inițiale. 1p

Subiectul 2.

Fie α o rădăcină complexă, nereală, de ordinul 3 a unității. Considerăm matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unde $A^{103} = I_n$ și $B = A^2 + \alpha \cdot A + \alpha^2 \cdot I_n$.

- a) Arătați că $(A - \alpha \cdot I_n) \cdot (A^{100} \cdot B + A^{97} \cdot B + A^{94} \cdot B + \dots + A \cdot B + I_n) = (1 - \alpha) \cdot I_n$.
- b) Demonstrați că există o matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $(A^2 + A + I_n) \cdot X = I_n$.

Supliment Gazeta Matematică nr. 3/2025, Alexandru Benescu

Soluție: a) $(A - \alpha \cdot I_n) \cdot (A^{100} \cdot B + A^{97} \cdot B + A^{94} \cdot B + \dots + A \cdot B + I_n) =$
 $= (A - \alpha \cdot I_n) \cdot (A^{102} + \alpha \cdot A^{101} + \alpha^2 \cdot A^{100} + A^{99} + \alpha \cdot A^{98} + \alpha^2 \cdot A^{96} + \dots + A^3 + \alpha \cdot A^2 + \alpha^2 \cdot A + I_n) =$
 $= (A - \alpha \cdot I_n) \cdot (A^{102} + \alpha \cdot A^{101} + \alpha^2 \cdot A^{100} + \alpha^3 \cdot A^{99} + \alpha^4 \cdot A^{98} + \alpha^5 \cdot A^{96} + \dots + \alpha^{99} \cdot A^3 + \alpha^{100} \cdot A^2 + \alpha^{101} \cdot A + \alpha^{102} \cdot I_n) =$
 $= A^{103} - \alpha^{103} \cdot I_n^{103} = I_n - \alpha \cdot I_n = (1 - \alpha) \cdot I_n$ 3p

b) Fie β cealaltă rădăcină complexă, nereală, de ordinul 3 a unității. Considerăm $C = A^2 + \beta \cdot A + \beta^2 \cdot I_n$.

Notăm $A^{100} \cdot B + A^7 \cdot B + A^4 \cdot B + \dots + A \cdot B + I_n = U$ și $A^{100} \cdot C + A^7 \cdot C + A^4 \cdot C + \dots + A \cdot C + I_n = V$.

Conform punctului a), are loc $(A - \alpha \cdot I_n) \cdot U = (1 - \alpha) \cdot I_n$ (1) și evident și $(A - \beta \cdot I_n) \cdot V = (1 - \beta) \cdot I_n$ (2). 1p

Cum matricele A, U și V comută, înmulțind relațiile (1) și (2), obținem

$(A - \alpha \cdot I_n) \cdot (A - \beta \cdot I_n) \cdot U \cdot V = (1 - \alpha)(1 - \beta) \cdot I_n$. Ținând seama că $(A - \alpha \cdot I_n) \cdot (A - \beta \cdot I_n) = A^2 + A + I_n$ și că $(1 - \alpha)(1 - \beta) = 3$, rezultă $(A^2 + A + I_n) \cdot U \cdot V = 3 \cdot I_n$ 2p

Pentru $X = \frac{1}{3} \cdot U \cdot V$ obținem concluzia de la punctul b). 1p

Subiectul 3.

Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale, unde $x_1 \in \mathbb{R}$ și $x_{n+1} = \sqrt{6 - x_n - x_n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Arătați că $x_n \in [-3, 2]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$;
- b) Determinați termenul general al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$.

Cristian Heuberger

Soluție: a) Pentru orice $n \geq 1$, trebuie ca $6 - x_n - x_n^2 \geq 0$ și de aici $x_n \in [-3, 2]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 1p

b) Pentru orice $n \geq 2$, are loc $x_n \geq 0$, rezultând că $x_n \in [0, 2]$ $\forall n \geq 2$.

Dacă $x_n > \frac{3}{2}$, atunci $x_{n+1} < \frac{3}{2}$.

Într-adevăr $x_{n+1} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{6 - x_n - x_n^2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 6 - x_n - x_n^2 < \frac{9}{4} \Leftrightarrow (2x_n - 3)(2x_n + 5) > 0$ (A).

Analog, pentru $n \geq 2$, dacă $x_n < \frac{3}{2}$, atunci $x_{n+1} > \frac{3}{2}$ 1p

Cazul I: $x_2 > \frac{3}{2}$ În acest caz toți termenii de rang par sunt strict mai mari ca $\frac{3}{2}$ și toți termenii de rang impar sunt mai mici strict ca $\frac{3}{2}$.

Pentru n par, avem $x_n - x_{n+1} > 0$ și în plus

$$x_{n+2} = \sqrt{6 - x_{n+1} - x_{n+1}^2} = \sqrt{6 - \sqrt{6 - x_n - x_n^2} - \sqrt{6 - x_n - x_n^2}^2} = \sqrt{x_n^2 + x_n - \sqrt{6 - x_n - x_n^2}} = \sqrt{x_n^2 + x_n - \underbrace{\sqrt{6 - x_n - x_n^2}}_{>0}} > x_n. \quad \text{Subșirul}$$

termenilor de rang par este așadar strict crescător și cum este mărginit superior de 2, este convergent la un număr real $L_1 > \frac{3}{2}$ 1p

Trecând la limită în relația de recurență $x_{n+2} = \sqrt{x_n^2 + x_n - \sqrt{6 - x_n - x_n^2}}$, obținem

$$L_1 = \sqrt{L_1^2 + L_1 - \sqrt{6 - L_1 - L_1^2}} \quad \text{și apoi imediat } L_1 = \frac{3}{2} \text{ ceea ce este fals.}$$

Rezultă că nu convine cazul I. 2p

Cazul II: $x_2 < \frac{3}{2}$. În acest caz toți termenii de rang par sunt strict mai mici ca $\frac{3}{2}$ și toți termenii de rang impar sunt mai mari strict ca $\frac{3}{2}$. Un raționament similar cu cel făcut la cazul anterior pentru termenii de rang impar conduce la faptul că nici cazul al II-lea nu convine. 1p

Singurul caz convenabil este $x_2 = \frac{3}{2}$, șirul fiind constant începând cu rangul al doilea.

$$\text{Dacă } x_2 = \frac{3}{2}, \text{ atunci } \sqrt{6 - x_1 - x_1^2} = \frac{3}{2}. \text{ Obținem } x_1 = -\frac{5}{2} \text{ sau } x_1 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Așadar } x_1 = -\frac{5}{2} \text{ și } x_n = \frac{3}{2}, \forall n \geq 2 \text{ sau } x_n = \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad \text{..... 1p}$$

Subiectul 4.

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere naturale nenule distincte. Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, definit prin $x_n = \cos \frac{1}{a_1} + \cos \frac{1}{a_2} + \dots + \cos \frac{1}{a_n} - n$ este convergent și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in (-1, 0)$.

Soluție: Deoarece $x_{n+1} - x_n = \cos \frac{1}{a_{n+1}} - 1 < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$, șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător. 2p

În continuare, vom utiliza formula $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ și faptul că $\sin x < x, \forall x > 0$. Pentru $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\cos \frac{1}{a_1} - 1 \right) + \left(\cos \frac{1}{a_2} - 1 \right) + \dots + \left(\cos \frac{1}{a_n} - 1 \right) = -2 \sin^2 \frac{1}{2a_1} - 2 \sin^2 \frac{1}{2a_2} - \dots - 2 \sin^2 \frac{1}{2a_n} > \dots \quad 2p \\ &> -2 \left(\frac{1}{4a_1^2} + \frac{1}{4a_2^2} + \dots + \frac{1}{4a_n^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2} \right) \geq -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \geq \\ &\geq -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \right) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) = -\frac{7}{8} + \frac{1}{2n} > -\frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit inferior, fiind așadar convergent. 2p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \left[-\frac{7}{8}, a_1 \right] \subset (-1, 0). \quad \text{..... 1p}$$

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XVIII-a, Baia Mare, 22 noiembrie 2025

BAREM DE CORECTARE, CLASA A XII-A

Subiectul 1. Determinați funcția derivabilă $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(1) = 0$, astfel încât

$$f'(\ln x) \cdot (\ln x)^2 = (2 - \ln x)^2, \text{ pentru orice } x \in (1, \infty).$$

Soluție: $\frac{1}{x} \cdot \left(f'(\ln x) - \frac{(2 - \ln x)^2}{(\ln x)^2} \right) = 0$, deci $I(x) = \int \frac{1}{x} \cdot \left(f'(\ln x) - \frac{(2 - \ln x)^2}{(\ln x)^2} \right) dx = C \dots\dots\dots 3p$

Cu schimbarea de variabilă $\ln x = t$, avem $I(t) = \int \left(f'(t) - \frac{(2-t)^2}{t^2} \right) dt = f(t) + \frac{4}{t} + 4 \ln t - t + C, t \in (0, \infty) \dots\dots\dots 2p$

Așadar $f(t) = -\frac{4}{t} - 4 \ln t + t + c, c \in \mathbb{R}$. Cum $f(1) = 0$, rezultă că $f(x) = -\frac{4}{x} - 4 \ln x + x + 3, \forall x \in (0, \infty) \dots\dots\dots 2p$

Subiectul 2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție primitivabilă, cu proprietatea că orice primitivă a sa admite asimptote spre $+\infty$ și spre $-\infty$. Demonstrați că orice dreaptă oblică intersectează graficul funcției f în cel puțin un punct.

Marius Perianu, Gazeta Matematică

Soluție: Demonstrăm că, pentru orice $m, n \in \mathbb{R}$, cu $m > 0$, funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - mx - n$ se anulează în cel puțin un punct; dacă $m < 0$, se folosește un raționament analog pentru funcția $-f$. $\dots\dots\dots 1p$

Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f . Fără a restrânge generalitatea, putem alege $F(0) = 0$.

F admite asimptote spre $+\infty$ și spre $-\infty$, deci există și sunt finite limitele $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{x}$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x}$. (1) $\dots\dots\dots 1p$

Funcția $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - \frac{mx^2}{2} - nx$ este o primitivă a lui g , cu $G(0) = 0$. $\dots\dots\dots 1p$

Presupunem prin absurd că $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci G este strict crescătoare, deci $G(x) > G(0) = 0, \forall x > 0$.

Prin urmare, $\frac{F(x)}{x} > \frac{mx}{2} + n, \forall x > 0$, deci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x} = \infty$, contradicție cu (1). $\dots\dots\dots 1p$

Presupunem prin absurd că $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci G este strict descrescătoare, deci $G(x) > G(0) = 0, \forall x < 0$

Așadar, $\frac{F(x)}{x} < \frac{mx}{2} + n, \forall x < 0$, deci $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{F(x)}{x} = -\infty$, contradicție cu (1). $\dots\dots\dots 2p$

În consecință, există, există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, cu $g(\alpha) \geq 0$ și $g(\beta) \leq 0$. Deoarece g are primitive, rezultă că g are proprietatea lui Darboux, deci există x_0 între α și β , cu $g(x_0) = 0$. $\dots\dots\dots 1p$

Subiectul 3. Fie $M = (0, \infty)$ și legea de compoziție $*$: $M \times M \rightarrow M$, cu proprietățile:

P1: Dacă $a, b, c, x \in M$, atunci $a * (b * c) = x$ dacă și numai dacă $a * b = x * c$.

P2: $(a * b) * c = a * (b * c)$, pentru orice $a, b, c \in M$.

P3: $(a \cdot b) * c = a * (c * b)$, pentru orice $a, b, c \in M$.

a) Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” **nu** are element neutru, **nu** este comutativă și **nu** este asociativă.

b) Dați un exemplu de astfel de lege de compoziție.

Dana Heuberger

Soluție: a) Presupunem că legea de compoziție admite elementul neutru $e \in M$.

Pentru $a = e$ în P2, obținem $(e * b) * c = e * (b * c) \Leftrightarrow b * c = b * c$, pentru orice $b, c \in M$ 1p

P1 devine $a \cdot (b * c) = x \Leftrightarrow a \cdot b = x * c$, fals. Așadar, legea de compoziție „ $*$ ” nu are element neutru. 1p

Presupunem că pentru orice $a, b \in M$, $a * b = b * a$. Din P1 obținem $a * (b * a) = b$ și cum „ $*$ ” este comutativă,

rezultă $b = (b * a) * a \stackrel{P2}{=} b * a^2$, pentru orice $a, b \in M$ 1p

Pentru $a = 1$, din egalitatea precedentă deducem că $b = b * 1 = 1 * b$, pentru orice $b \in M$, deci legea „ $*$ ” are element neutru, contradicție. Așadar legea „ $*$ ” nu este comutativă. 1p

Presupunem că legea este asociativă. Așadar $a * (b * c) \stackrel{P2}{=} (a * b) * c = a * (b * c) \stackrel{P3}{=} (a \cdot c) * b$, $\forall a, b, c \in M$. (1) 1p

Pentru $b = 1$, din (1) obținem că $a * c = (a \cdot c) * 1$, $\forall a, c \in M$ (2).

Pentru $a = 1$, din (1) obținem că $1 * (b \cdot c) = c * b = (c \cdot b) * 1 = (b \cdot c) * 1$, $\forall b, c \in M$. (3)

Pentru $c = 1$, din (3) rezultă că $1 * b = b * 1$, $\forall b \in M$, deci legea admite elementul neutru $e = 1$, contradicție. Așadar legea „ $*$ ” nu este asociativă. 1p

b) Legea de compoziție $a * b = a : b$, $\forall a, b \in M$ verifică enunțul. 1p

Subiectul 4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și un semigrup $(S, \cdot)$ cu proprietatea că există $a \in S$, astfel încât $ax^n a = x$, pentru orice $x \in S$. Demonstrați că:

a) $(S, \cdot)$ este monoid

b) $x^{2n-1} = x$, pentru orice $x \in S$.

Mihai Opincariu, Gazeta Matematică 9/2025

Soluție: a) Știm că există $a \in S$, astfel încât pentru orice $x \in S$, $ax^n a = x$. (*)

Pentru $x = a$, din (*) obținem $a^{n+2} = a$ 1p

(*) $\stackrel{| \cdot a^{n+1}}{\Leftrightarrow} ax^n a^{n+2} = xa^{n+1}$, deci $x = ax^n a = ax^n a^{n+2} = xa^{n+1}$, $\forall x \in S$ (1).

(*) $\stackrel{| \cdot a^{n+1}}{\Leftrightarrow} a^{n+2} x^n a = a^{n+1} x$, deci $x = ax^n a = a^{n+2} x^n a = a^{n+1} x = xa^{n+1}$, $\forall x \in S$. Așadar $e = a^{n+1}$ este elementul neutru al legii, deci $(S, \cdot)$ este monoid. 1p

b) Pentru $x = e$, din (*) deducem că $a^2 = e$.

I. Dacă $n = 2k$, cu $k \geq 2$, atunci $e = a^{n+1} = a^{2k+1} = (a^2)^k \cdot a = ea = a$ 1p

Din (*) deducem că $x^n = x$, $\forall x \in S$, deci $x^{2n-1} = x^n \cdot x^{n-1} = x \cdot x^{n-1} = x^n = x$, $\forall x \in S$ 1p

II. Dacă $n = 2k + 1$, cu $k \in \mathbb{N}$, atunci demonstrăm că $x^{4k+1} = x$, $\forall x \in S$.

$$(*) \Leftrightarrow ax^{2k+1}a = x \stackrel{a^2=e}{\Leftrightarrow} x^{2k+1} = axa \Leftrightarrow ax = x^{2k+1}a, \forall x \in S. \quad (2)$$

Înlocuind x cu x^{2k+1} în (2), rezultă că $x^{4k^2+4k+1} = ax^{2k+1}a = x$, $\forall x \in S$. (3) 1p

$$(2) \Leftrightarrow ax = x^{2k+1}a \text{ și folosind (2) se deduce prin inducție că } (ax)^{2t+1} = x^{(2t+2)k+(2t+1)}a, \forall t \in \mathbb{N}. \quad (4) \dots\dots\dots 1p$$

Pentru $t = k$, din (2) și (4) obținem că $xa = a(ax)a = (ax)^{2k+1} \stackrel{(2)}{=} x^{2k^2+4k+1}a$, deci $x = x^{2k^2+4k+1}$, $\forall x \in S$.

$$\text{Așadar } x \stackrel{(3)}{=} x^{4k^2+4k+1} = x^{2k^2+4k+1} \cdot x^{2k^2} = x \cdot x^{2k^2} = x^{2k^2+1}, \text{ deci } x = x^{2k^2+4k+1} = x^{2k^2+1} \cdot x^{4k} = x \cdot x^{4k} = x^{4k+1}, \forall x \in S \dots\dots\dots 1p$$